***Теорема о вронскиане системы линейно независимых частных решений ЛОДУ***

Пусть – линейно независимые на – частные решения ЛОДУ n-го порядка . Тогда

***Док-во***: (от противного)

Пусть . Рассмотрим СЛАУ относительно :

Ее определитель , следовательно, система имеет ненулевое решение, т.е. , не все равные , такие, что выполняется система (2.7.3).

Рассмотрим частное решение ЛОДУ .

.

Оно удовлетворяет в т. начальным условиям (в силу (2.7.3)):

Рассмотрим частное решение ЛОДУ

Оно удовлетворяет в т. начальным условиям

.

Таким образом, частные решения ЛОДУ и удовлетворяют одним и тем же начальным условиям задачи Коши. По теореме о единственности решения задачи Коши , т.е. , т.е. – линейно зависимы на – противоречит условию линейной независимости .

Т.е.

*Замечание*. Пусть – частные решения ЛОДУ . График функции может иметь вид (см. рис. 37, 38):

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. 37 | Рис. 38 |
| *(для линейно независимых решений)* | *(для линейно зависимых решений)* |

Не может иметь вид (см. рис. 39, 40):

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. 39 | Рис. 40 |

# 

# Теорема о размерности пространства решений ЛОДУ n-го порядка. Фундаментальная система решений. Структура общего решения.

***Теорема о размерности пространства решений ЛОДУ n-го порядка***

Размерность пространства решений ЛОДУ n-го порядка равна *n*.

***Док-во***: нужно доказать, что существует базис пространства решений, состоящий из частных решений, т.е. частные решения , которые удовлетворяют следующим условиям:

1. Они линейно независимы на
2. Любое частное решение имеет вид
3. рассмотрим частные решения ЛОДУ , удовлетворяющие начальным условиям:

*–* фиксированная точка интервала .

По теореме существования и единственности решения задачи Коши определены на всем интервале .

Т.к. , то функции – линейно независимы на , т.к. иначе должен был бы равняться нулю.

2. Рассмотрим произвольное частное решение .

Оно удовлетворяет некоторым начальным условиям:

Рассмотрим частное решение . Оно удовлетворяет начальным условиям:

Т.е. и удовлетворяют одинаковым начальным условиям в точке . По теореме о единственности решения

***Опр.*** Система n линейно независимых частных решений ЛОДУ *n*-го порядка называется фундаментальной системой решений (ФСР) ЛОДУ.

ФСР – базис линейного пространства решений.

***Теорема о структуре общего решения ЛОДУ n-го порядка***

Пусть – ФСР. Тогда общее решение имеет вид:

– произвольные постоянные.

***Док-во***: нужно доказать, что для такие, что частное решение удовлетворяет начальным условиям:

.

Решение , удовлетворяющее данным начальным условиям, существует и определено на всем . линейному пространству решений и разлагается по базису линейного пространства:

# ЛОДУ с постоянным коэффициентами. Характеристическое уравнение и построение общего решения по его корням (вывод для ).

,

– линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами:

.

Рассмотрим случай :

Для произвольного найдем частное решение вида

.

.

Тогда

***Опр.*** Уравнение называется характеристическим уравнением ЛОДУ с постоянными коэффициентами.

Таким образом, при имеем и функция является частным решением является корнем его характеристического уравнения.

***Построение ФСР ЛОДУ с постоянными коэффициентами по корням характеристического уравнения.***

1. ***Случай различных действительных корней.***

Пусть - различные корни характеристического уравнения. Тогда функции

образуют ФСР ЛОДУ.

***Док-во***:

– частные решения, т.к. - корни характеристического уравнения. Покажем, что – линейно независимы.

– линейно независимы.

(

При : ).

Тогда .

*Пример*.

.

Характеристическое уравнение:

,

,

,

,

.

1. ***Случай кратных действительных корней.***

Пусть - корень кратности , т.е. – многочлен, причем .

Корню кратности соответствует линейно независимых решений:

.

***Док-во***: (для n=2)

Пусть - корень кратности характеристического уравнения

.

Тогда по теореме Виета .

– решение, т.к. – корень.

Покажем, что – также решение:

.

(

*).*

Тогда

.

– решения, линейно независимые, т.к. – ФСР ЛОДУ с постоянными коэффициентами 2-го порядка и кратным корнем .

*Пример.*

Характеристическое уравнение:

,

,

.

ФСР:.

1. ***Случай комплексных корней кратности 1.***

Пусть – корень характеристического уравнения кратности 1 . Тогда – также корень кратности 1. Паре корней соответствуют 2 линейно независимых решения:

.

***Док-во***:

Рассмотрим комплексную показательную функцию, которую введем по формуле Эйлера

Покажем, что при :

Тогда для функции

е. – комплексное решение ЛОДУ с постоянными коэффициентами.

Т.к. – решение, то , т.е. , т.е. функции

,

– решения ЛОДУ, они линейно независимы, т.к. .

*Примеры*.

1. .

,

,

,

.

ФСР: ,

.

1. .

,

ФСР: .

.